# The construction of Oeljeklaus-Toma manifolds from Lie algebras and lattices

東京大学　大学院数理科学研究科　数理科学専攻

神田秀峰 (Shuho KANDA) *

**概要**

Oeljeklaus-Toma 多様体は数論的に構成され, その一部は局所共形 Kähler 可解多様体の族を与える．この構成では, meta-abelian Lie 群であって左不変局所共形 Kähler 構造を持つものとその格子が同時に与えられる．本研究ではその逆, ある種の meta-abelian Lie 群であって左不変局所共形 Kähler 構造を持つものが格子を持つとき, それは Oeljeklaus-Toma 多様体の構成によって得られることを示した．この結果は Oeljeklaus-Toma 多様体の幾何学的特徴付けを与えると同時に, 数論的構成が格子の存在を議論するにあたって普遍的な手法であることを示唆している．

## 1　局所共形 Kähler 多様体

複素多様体 $(M, J)$ の上の計量 $g$ であって, その基本形式 $\omega(\cdot,\cdot) = g(J\cdot,\cdot)$ が $d\omega = 0$ を満たすものを $(M, J)$ 上の Kähler 計量といい, $(M, J, g)$ を Kähler 多様体という．複素多様体論における主な研究対象はコンパクト Kähler 多様体である．しかしここ十数年でコンパクト非 Kähler 多様体, つまりいかなる計量をもってしても Kähler 多様体とはならないコンパクト複素多様体の研究に注目が集まっている．

Kähler 性を少し弱めた計量を定義する．

**定義 1.1.** 複素多様体 $(M, J)$ 上の計量 $g$ が**局所共形 Kähler** (locally conformally Kähler, LCK) とは, ある $M$ の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ と実関数族 $f_i \in C^\infty(U_i)$ が存在して, $e^{-f_i}g$ が $U_i$ 上で Kähler となることである．

$e^{-f_i}g$ の基本形式は $e^{-f_i}\omega$ なので, これが Kähler となることは $d(e^{-f_i}\omega) = 0$ すなわち $d\omega = df_i \wedge \omega$ と同値である．よって $U_i \cap U_j$ 上で $df_i \wedge \omega = df_j \wedge \omega$ となるが, $\omega$ は非退化なので $df_i = df_j$ となり, これらは張り合って $M$ 上の閉形式 $\theta$ を定める．これにより以下がわかる．

**命題 1.2.** 複素多様体 $(M, J)$ 上の計量 $g$ が LCK であることは, ある閉形式 $\theta$ が存在して $d\omega = \theta \wedge \omega$ となることと同値．この $\theta$ は一意に定まり, **Lee 形式**と呼ばれる．

* E-mail:shuho@ms.u-tokyo.ac.jp

古典的に知られているコンパクト非 Kähler 多様体の例として Hopf 多様体がある．これは LCK 多様体の典型例である．

**例 1.3.** $\lambda \in \mathbb{C}$ を $|\lambda| > 1$ をみたす複素数とする．$\mathbb{Z}$ から $X = \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ への作用を $k \cdot z = \lambda^k z$ と定め，この作用による商多様体 $X/\mathbb{Z}$ を **Hopf 多様体**という．Hopf 多様体の 1 次ベッチ数は 1 であり，コンパクト Kähler 多様体の位相的制約から，これは Kähler 多様体になり得ない．$g$ を $\mathbb{C}^n$ 上の標準エルミート計量の $X$ への制限とする．$X$ 上の実関数 $\Psi(z) = |z|^{-2} : X \to \mathbb{R}_{>0}$ について，$\Psi g$ は $\mathbb{Z}$ の作用について不変となる．よって $X/\mathbb{Z}$ 上の計量を定め，構成からこの計量は LCK 計量となる．

古典的に知られている多くのコンパクト非 Kähler 多様体に LCK 構造が入ることが知られており，非 Kähler 多様体論において LCK 多様体論は重要な位置を占める．LCK 構造のうち Lee 形式が平行なもの，つまり $\nabla$ を Levi-Civita 接続としたときに $\nabla\theta = 0$ となるものを **Vaisman 多様体**という．古典的に知られている多くの LCK 多様体，例えば Hopf 多様体などは Vaisman 多様体となる．Vaisman 多様体はよく研究されているが，Kähler 多様体上での理論の類似を考えるという文脈の研究が多い．LCK 多様体論においては Vaisman という仮定はかなり強く，例えば LCK 多様体を調べるための多くの不変量が自明となってしまう．以上の理由により，Vaisman 構造の入らない LCK 多様体を構成することは重要である．

# 2 冪零多様体

この章ではコンパクト非 Kähler 多様体を構成する典型的な方法を紹介する．$G$ を連結かつ単連結な冪零 Lie 群とし，$\Gamma$ をその格子，つまり $G$ の離散部分群で $\Gamma\backslash G$ がコンパクトとなるものとする．このとき多様体 $\Gamma\backslash G$ を**冪零多様体**という．冪零多様体が Kähler 多様体になるのはトーラスの場合に限ることが知られている [BG88][Has89]．よって $G$ として非可換なものをとり，$J$ を左不変複素構造とすればコンパクト複素多様体 $(\Gamma\backslash G, J)$ が定まり，これは非 Kähler 多様体となる．

$G$ の左不変複素構造 $J$ は $G$ の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に定まる複素構造 $J$ と対応する．ここで Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の複素構造 $J$ とは，$J \in \operatorname{End}\mathfrak{g}$ であって $J^2 = -\operatorname{id}$ かつ可積分条件

$$[X, Y] - [JX, JY] + J[X, JY] + J[JX, Y] = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

を満たすものである．以上より，非可換な冪零 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，その上の複素構造 $J$，そして対応する単連結 Lie 群 $G$ の格子 $\Gamma$ を見つければ，コンパクト非 Kähler 多様体を得ることができる．

**例 2.1.** 可換環 $R$ に対し Heisenberg 群 $H_3(R)$ を

$$H_3(R) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \in R \right\}$$

と定める．このとき $G = \mathbb{R} \times H_3(\mathbb{R})$ は 4 次元冪零 Lie 群を定める．これは $\Gamma := \mathbb{Z} \times H_3(\mathbb{Z})$ を格子として持つ．対応する Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は，その生成元を $T, X, Y, Z$ として

$$[X, Y] = Z$$

という Lie 括弧積により定義される．このとき $JX = Y$, $JT = Z$ によって $\mathfrak{g}$ の複素構造が定まる．これによって定まるコンパクト複素多様体 $(\Gamma\backslash G, J)$ を**小平-Thurston 多様体**といい, Kähler 計量を持たないことが知られている．

上記の例を見ると, $G$ の構造がよく分かっていれば格子を構成するのはさほど難しくないように感じられる．実際, 冪零 Lie 群の格子の存在に関する必要十分条件として以下が知られている．

**定理 2.2** ([Mal49])**.** 単連結冪零 Lie 群 $G$ が格子を持つための必要十分条件は, 対応する Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$ であって構造定数 $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$ が全て有理数となるものが存在することである．

この定理を用いれば $G$ に格子が存在するかどうかはすぐに判定できる．このようにして, 冪零多様体によってコンパクト非 Kähler 多様体の例をたくさん構成することができる．$G$ の左不変 LCK 計量 $g$ を考えれば $(\Gamma\backslash G, J, g)$ という LCK 多様体が得られる．複素構造のときと同様に, これは Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の LCK 構造と対応する．しかし次の命題が示すように, LCK 多様体論における重要な例を得るためには冪零多様体を考えるだけでは不十分である．

**命題 2.3** ([Saw07])**.** 冪零 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に入る LCK 構造は全て Vaisman となる．

つまり上記の構成によって得られる冪零多様体は全て Vaisman 多様体になってしまう．例えば例 2.1 には LCK 構造が入るが, これは Vaisman となる．コンパクト LCK 多様体であって Vaisman でないものを得るには, より広いクラスの Lie 群を考える必要がある．

# 3 可解多様体

冪零 Lie 群より広いクラスとして可解 Lie 群を考える．$G$ を連結かつ単連結な可解 Lie 群とすると, 冪零 Lie 群のときと同様に議論を進めることができる．格子 $\Gamma$ が存在したとき多様体 $\Gamma\backslash G$ を**可解多様体**という．これが Kähler 多様体になる場合は簡単なケースに限ることが知られている [Has06]. 対応する Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の LCK 計量 $g$ をとることでコンパクト LCK 多様体 $(\Gamma\backslash G, J, g)$ を得ることができ, これは Vaisman になるとは限らない．可解多様体であって非 Vaisman LCK 多様体となるものを構成するまであと一歩のように見えるが, ここで難所となるのが格子の存在である．可解 Lie 群についてはその格子の存在の判定が非常に難しく, 具体的な可解 Lie 群の格子を構成するだけでも重要な研究結果となる．例えば以下のように非常に簡単な可解 Lie 群でさえ, その格子の構成は非自明である．

**例 3.1.** $G = \mathbb{R} \ltimes_\phi \mathbb{R}^2$ を 3 次元可解 Lie 群とする．ここで $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ は以下のよう定義される;

$$\phi(x) \coloneqq \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}.$$

行列 $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ であって相異なる 2 つの正の固有値 $\lambda, \lambda^{-1}$ を持つものをとる．$P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ をその対角化行列, つまり $P^{-1}MP = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1})$ を満たす行列とする．この時

$$\Gamma \coloneqq ((\log \lambda)\mathbb{Z}) \ltimes_\phi (P^{-1}\mathbb{Z}^2)$$

は $G$ の格子となる.

上記のように, $G = \mathbb{R}^m \ltimes_\phi \mathbb{R}^n$ という形をした可解 Lie 群を **meta-abelian** という. 対応する Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \ltimes_{d\phi} \mathbb{R}^n$ についても meta-abelian と呼ぶ. 実は meta-abelian Lie 群のうち, nilradical が $\mathbb{R}^n$ に一致するものについては, 上記の例におけるテクニックがそのまま格子の存在の必要十分条件となる. nilradical が $\mathbb{R}^n$ に一致するとは, $X \in \mathbb{R}^m \subset \mathfrak{g}$ であって $d\phi(X)$ が nilpotent なものが 0 に限ることをいう.

**命題 3.2.** meta-abelian Lie 群 $G = \mathbb{R}^m \ltimes_\phi \mathbb{R}^n$ について, その nilradical が $\mathbb{R}^n$ とする. $G$ が格子を持つとき, 格子 $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^m$ と正則行列 $P \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ が存在して

$$P\phi(X)P^{-1} \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}), \quad \text{for all } X \in \Gamma_1$$

となる. このとき

$$\Gamma \coloneqq \Gamma_1 \ltimes_\phi (P^{-1}\mathbb{Z}^m)$$

は $G$ の格子となる.

さて, 可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその上の非 Vaisman LCK 構造 $J, g$ および対応する Lie 群 $G$ の格子を構成することはできるだろうか. 驚くべきことに, 数論的考察を用いることで難なく構成できてしまう. これが次章で紹介する Oeljeklaus-Toma 多様体である.

# 4 Oeljeklaus-Toma 多様体

Oeljeklaus-Toma 多様体 (OT 多様体) は井上曲面の高次元化として知られる. 井上曲面はもともと 1974 年にコンパクト非 Kähler 曲面の研究の中で構成された多様体の族であり, その定義に数論的考察は含まれていない [Ino74]. しかし Oeljeklaus と Toma はその構成を数論的に捉え直し, 2005 年に井上曲面の高次元化に成功した [OT05]. 井上曲面は非 Vaisman LCK 構造を持つことが知られていたが, 高次元化された OT 多様体についても, その一部は非 Vaisman LCK 構造を持つ. さらに 2013 年には糟谷 [Kas13] によって, OT 多様体が meta-abelian Lie 群による可解多様体の構造を持つことが示された. このようにして OT 多様体は, LCK 多様体論において最も重宝される多様体の族となった. 以下ではその構成について述べる.

$f \in \mathbb{Q}[x]$ を $n$ 次の有理係数既約モニック多項式とする. $f$ は $s$ 個のの実根と $2t$ 個の複素根を持つとする. ここで $s, t \geq 1$ を仮定する. $K \coloneqq \mathbb{Q}[x]/(f)$ とすると $K$ は $n = s + 2t$ 次の代数体となる. $x$ に $f$ の根を代入するという操作から, $K$ の実埋め込み $\sigma_1, \ldots, \sigma_s \colon K \hookrightarrow \mathbb{R}$ と複素埋め込み $\sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_{s+2t} \colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$ が定義される. 添え字を入れ替えて $\sigma_{s+i} = \overline{\sigma_{s+t+i}}$ としておく.

$\mathcal{O}_K$ を $K$ の代数的整数環, つまり最小多項式として整数係数モニックなものがとれるような $K$ の元全体とする. $\mathcal{O}_K \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} \simeq K$ なので, アーベル群としてのランクは $n$ となる. $\mathcal{O}_K^\times$ を $\mathcal{O}_K$ の単数群とする. この群には捩れが存在するが, それらを取り除くように $\mathcal{O}_K^\times$ の部分群 $\mathcal{O}_K^{\times,+}$ を以下のように定義する;

$$\mathcal{O}_K^{\times,+} \coloneqq \{a \in \mathcal{O}_K^\times \mid \sigma_i(a) > 0 \text{ for all } 1 \leq i \leq s\}.$$

さて, $\mathbb{H} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ を上半平面とする. 作用 $\mathcal{O}_K \curvearrowright \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ を, $a \in \mathcal{O}_K$ に対し

$$T_a(w_1, \ldots, w_s, z_1, \ldots, z_t) \coloneqq (w_1 + \sigma_1(a), \ldots, z_t + \sigma_{s+t}(a))$$

と定義する. また作用 $\mathcal{O}_K^{\times,+} \curvearrowright \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ を, $u \in \mathcal{O}_K^{\times,+}$ に対し

$$R_u(w_1, \ldots, w_s, z_1, \ldots, z_t) \coloneqq (\sigma_1(u) \cdot w_1, \ldots, \sigma_{s+t}(u) \cdot z_t).$$

と定義する. この 2 つの作用により, 作用 $(\mathcal{O}_K^{\times,+} \ltimes \mathcal{O}_K) \curvearrowright \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ が定まる.

さて, $\mathcal{O}_K^{\times,+}$ の群構造は Dirichlet の単数定理により記述される.

**定理 4.1** (Dirichlet の単数定理)**.** 埋め込み

$$\begin{gathered} \log : \mathcal{O}_K^{\times,+} \hookrightarrow \mathbb{R}^{s+t} \\ u \mapsto (\log \sigma_1(u), \ldots, \log \sigma_s(u), \log |\sigma_{s+1}(u)|^2, \ldots, \log |\sigma_{s+t}(u)|^2) \end{gathered}$$

について, その像は $H \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^{s+t} \mid \sum_{i=1}^{s+t} x_i = 0\}$ 内の格子をなす.

特に, $\mathcal{O}_K^{\times,+}$ のランクは $s+t-1$ となる. 作用 $(\mathcal{O}_K^{\times,+} \ltimes \mathcal{O}_K) \curvearrowright \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ を離散的にするために, より低いランクの部分群 $U \subset \mathcal{O}_K^{\times,+}$ をとる必要がある.

**定義 4.2.** $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^s} : \mathbb{R}^{s+t} \to \mathbb{R}^s$ をはじめの $s$ 個の座標への射影とする. ランク $s$ の部分群 $U \subset \mathcal{O}_K^{\times,+}$ で $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^s}(\log(U))$ が $\mathbb{R}^s$ 内の格子となるものを **admissible** という.

Dirichlet の単数定理により, admissible となる $U$ は常に存在することがわかる. Oeljeklaus と Toma は, $U$ が admissible であるとき作用 $(U \ltimes \mathcal{O}_K) \curvearrowright \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ が固有不連続かつ商多様体がコンパクトであることを示した. この商多様体が OT 多様体である.

**定義 4.3.** 代数体 $K$ とその admissible 群 $U \subset \mathcal{O}_K^{\times,+}$ による **OT manifold** とは, 商多様体

$$X(K, U) \coloneqq \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t / (U \ltimes \mathcal{O}_K).$$

のことである. $(s, t)$ をこの OT 多様体の**タイプ**という.

井上曲面はタイプ $(1, 1)$ の OT 多様体である. OT 多様体の LCK 構造について, 以下が成立する.

**命題 4.4** ([OT05])**.** タイプ $(s, 1)$ の OT 多様体は LCK 構造を持つ.

*Proof.* $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}$ 上の計量 $g$ を $s$ 個の Poincaré 計量と 1 つの Euclid 計量の積として定める. 実関数 $\Psi \colon \mathbb{H}^s \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{>0}$ を

$$\Psi(w_1, \ldots, w_s, z) \coloneqq (\operatorname{Im} w_1) \cdots (\operatorname{Im} w_s)$$

として定めると $\Psi g$ は $U \ltimes \mathcal{O}_K$ 不変な計量となり, $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C} / (U \ltimes \mathcal{O}_K)$ 上の計量を定める. $g$ は Kähler なので, この計量は LCK である. □

逆に LCK 構造を持つ OT 多様体のタイプは $(s, 1)$ に限ることも最近示された [DV23]. また OT 多様体に入る LCK 構造は Vaisman になり得ない [Kas13].

## 5　OT 多様体の可解多様体としての構造

OT 多様体は可解多様体の構造をもつ．より詳しく, 以下が成立する．

**定理 5.1.** タイプ $(s,t)$ の OT 多様体 $X(K,U)$ に対し, $\mathbb{H}^s\times\mathbb{C}^t$ に可解 Lie 群の構造をうまく入れて $G$ とする．埋め込み $\iota\colon U\ltimes\mathcal{O}_K\hookrightarrow G$ であってその像が $G$ の格子 $\Gamma$ となっているものが存在し,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^s\times\mathbb{C}^t & = & G \\ {\scriptstyle L_{(u,a)}}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle L_{\iota(u,a)}} \\ \mathbb{H}^s\times\mathbb{C}^t & = & G \end{array}$$

が可換となる．ここで $L_{(u,a)}$ は $(u,a)\in U\ltimes\mathcal{O}_K$ による $\mathbb{H}^s\times\mathbb{C}^t$ への作用．$L_{\iota(u,a)}$ は $\iota(u,a)\in\Gamma$ を $G$ に左からかける作用である．

具体的にどのような群構造を入れるかは省略する．$G$ は meta-abelian Lie 群となり, 以下のような構造を持つ．

**定義 5.2.** 複素行列 $C=(c_{ij})_{ij}\in\mathrm{Mat}_{t\times s}(\mathbb{C})$ に対し $d\phi_C:\mathbb{R}^s\to\mathrm{End}(\mathbb{R}^s\times\mathbb{C}^t)$ を

$$d\phi_C(t_1,\dots,t_s)=\mathrm{diag}(t_1,\dots,t_s,(\sum_{j=1}^{s}c_{ij}t_j)_{i=1}^{t}),$$

と定める．このとき $C$ に付随する **OT-like Li 代数**を $\mathfrak{g}_C\coloneqq\mathbb{R}^s\ltimes_{d\phi_C}(\mathbb{R}^s\times\mathbb{C}^t)$ と定める．対応する単連結 Lie 群を $G_C$ とかき, **OT-like Lie 群**という．

**定理 5.3** ([Kas13])**.** タイプ $(s,t)$ の OT 多様体 $X(K,U)$ に対しある $C\in\mathrm{Mat}_{t\times s}(\mathbb{C})$ が存在し, $X(K,U)$ は OT-like Lie 群 $G_C$ をある格子で割った可解多様体となる．

任意の $C\in\mathrm{Mat}_{t\times s}(\mathbb{C})$ に対し Lie 群 $G_C$ を定義できることに注意．つまり OT 多様体の構成は, $G_C$ が格子を持つような $C$ を数論的に与える方法と言える．

以下, OT-like Lie 代数であって LCK 構造をもつものについて考察する．まず以下が成立する．

**命題 5.4.** $C\in\mathrm{Mat}_{t\times s}(\mathbb{C})$ に付随する OT-like Lie 代数 $\mathfrak{g}_C$ について, $\mathrm{Re}\,c_{ij}=-1/2$ が全ての $i,j$ について成立するとき, $\mathfrak{g}_C$ は非 Vaisman LCK 構造を持つ．このような $\mathfrak{g}_C$ を **LCK OT-like Lie 代数**という．対応する Lie 群 $G_C$ を **LCK OT-like Lie 群**という．

このような $C$ はたくさんあるので, 任意のタイプに対し非 Vaisman LCK 構造を持つ Lie 代数をたくさん構成できたことになる．これらに付随する Lie 群の格子を見つけることができれば非 Vaisman LCK 構造を持つ可解多様体が得られる．$C$ がタイプ $(s,1)$ の OT 多様体から作られる行列であれば, 付随する Lie 群には格子が存在する．では **OT 多様体から構成される $C$ の他に, LCK OT-like Lie 群であって格子を持つものは存在するだろうか.** 答えは No, つまり LCK OT-like Lie 群が格子を持つこととそれが OT 多様体から構成されることは同値である．

# 6　主定理

**定理 6.1.** $C \in \mathrm{Mat}_{t\times s}(\mathbb{C})$ であって, 全ての $i,j$ について $\mathrm{Re}\, c_{ij} = -1/2$ となるものをとる. $G_C$ が格子を持つならば $t = 1$ となり, あるタイプ $(s,1)$ の OT 多様体 $X(K,U)$ が存在し $C$ はこの OT 多様体から構成される.

証明はほぼ全て代数的な議論による. ここでは証明の概略を述べる. 行列 $C$ から得られる Lie 群 $G_C$ とその格子から何らかの代数体 $K$ を構成する必要があり, ここが最も非自明である.

Lie 群 $G_C$ は格子を持つので, 命題 3.2 によれば格子 $\Gamma \subset \mathbb{R}^s$ と正則行列 $P \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ が存在して

$$P\phi_C(X)P^{-1} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}), \quad \text{for all } X \in \Gamma.$$

となる. よって $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ の部分群 $U$ が

$$U \coloneqq \{P\phi_C(X)P^{-1} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \mid X \in \Gamma\}.$$

と定まる. これはランク $s$ の自由アーベル群となる. $\phi_C(X)$ は対角行列なので, $A \in U$ に対し

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\mu_A^1, \dots \mu_A^s, \lambda_A^1, \dots, \lambda_A^t)$$

とかける. $X \in \mathbb{R}^s$ の座標表示は $A = P\phi_C(X)P^{-1}$ としたとき $(\log \mu_A^1, \dots, \log \mu_A^s)$ である. よって $\Gamma$ が格子をなすとは $\{(\log \mu_A^1, \dots, \log \mu_A^s) \in \mathbb{R}^s \mid A \in U\}$ が $\mathbb{R}^s$ の格子をなすということである.

この状況から環 $K = \mathbb{Q}(U)$ が体になることを示すことができる. $U$ は $\mathcal{O}_K^{\times,+}$ の admissible 部分群となり, OT 多様体 $X(K,U)$ から定まる可解 Lie 群 $G$ を考えるとこれは $G_C$ と同型となる.

# 7　応用

LCK OT-like Lie 群が格子を持つときにそれが OT 多様体の構成から得られることは示されたが, この LCK OT-like Lie 群とはどのくらい特殊な Lie 群だろうか. 本研究ではこの Lie 群の幾何学的特徴付けも与えた.

**定理 7.1.** meta-abelian Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \ltimes_{d\phi} \mathbb{R}^n$ が, 非 Vaisman LCK 構造を持つとする. このとき $m \le 2$ なら, $\mathfrak{g}$ はある LCK OT-like Lie 代数と同型になる.

$m > 2$ については未解決であり, 本研究は以下の部分的な結果に留まる.

**定理 7.2.** meta-abelian Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \ltimes_{d\phi} \mathbb{R}^n$ が, 非 Vaisman LCK 構造を持つとする. このとき $\mathfrak{g} = J\mathbb{R}^n + \mathbb{R}^n$ なら, $\mathfrak{g}$ はある LCK OT-like Lie 代数と同型になる.

# 8　今後の研究について

左不変な非 Vaisman LCK 構造をもつ可解 Lie 群とその格子を見つける研究は, 格子を扱う難しさからほとんど進展がなかった. 今回の研究結果により, 例えば可解 Lie 群が $\mathbb{R}^m \ltimes_{d\phi} \mathbb{R}^n$ $(m \le 2)$ と

いう形をしている場合には完全に解決されたことになる.
本稿の内容からわかるように, このような研究は

(i) 可解 Lie 代数であって非 Vaisman LCK 構造を持つものの分類
(ii) そのような Lie 代数に付随する Lie 群の格子の存在性

からなる. 本研究においては (i) が定理 7.1, (ii) が定理 6.1 に対応する. 現状として, まず (i) に関する進展はほとんどない. 多くの研究において考えている Lie 代数のクラスが狭く, また結論は「このようなクラスの Lie 代数のうち非 Vaisman LCK 構造を持つものは存在しない」である. Lie 代数のレベルで存在しないので, そもそも (ii) へ議論が進む余地がない.

[AO18] では $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^n$ の場合について考察されている. (ii) についても議論することで $n = 3$ を結論付け, 最終的には井上曲面が得られることを示している. しかしこの議論において OT 多様体は現れないため, 本研究は [AO18] の結果を OT 多様体の構成と関連付け, 拡張を行なったものと言える.

当然, meta-abelian というクラスは可解 Lie 群全体の中ではごく一部である. より広いクラスの可解 Lie 群について (i) を考察することで, 新たな非 Vaisman LCK 可解 Lie 代数が発見される可能性がある. そこからさらに格子の存在が示されると, OT 多様体に代わる新たな例が発見されることとなる. このような例が今後発見されるのか, あるいは OT 多様体以外には存在しないのか, 筆者は前者を予想しているが, 後者だとしたらそれは非常に面白い事実だと思う.

## 参考文献


[AO18] A. Andrada and M. Origlia, *Lattices in almost abelian Lie groups with locally conformal Kähler or symplectic structures*, Manuscripta Math. **155** (2018), no. 3-4, 389–417.

[BG88] Chal Benson and Carolyn S. Gordon, *Kähler and symplectic structures on nilmanifolds*, Topology **27** (1988), no. 4, 513–518.

[DV23] Ştefan Deaconu and Victor Vuletescu, *On locally conformally Kähler metrics on Oeljeklaus-Toma manifolds*, Manuscripta Math. **171** (2023), no. 3-4, 643–647.

[Has89] Keizo Hasegawa, *Minimal models of nilmanifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), no. 1, 65–71.

[Has06] ———, *A note on compact solvmanifolds with Kähler structures*, Osaka J. Math. **43** (2006), no. 1, 131–135.

[Ino74] Masahisa Inoue, *On surfaces of Class* $\mathrm{VII}_0$, Invent. Math. **24** (1974), 269–310.

[Kas13] Hisashi Kasuya, *Vaisman metrics on solvmanifolds and Oeljeklaus-Toma manifolds*, Bull. Lond. Math. Soc. **45** (2013), no. 1, 15–26.

[Mal49] A. I. Malćev, *On a class of homogeneous spaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **13** (1949), 9–32.

[OT05] Karl Oeljeklaus and Matei Toma, *Non-Kähler compact complex manifolds associated to number fields*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005), no. 1, 161–171.

[Saw07] Hiroshi Sawai, *Locally conformal Kähler structures on compact nilmanifolds with left-invariant complex structures*, Geom. Dedicata **125** (2007), 93–101.